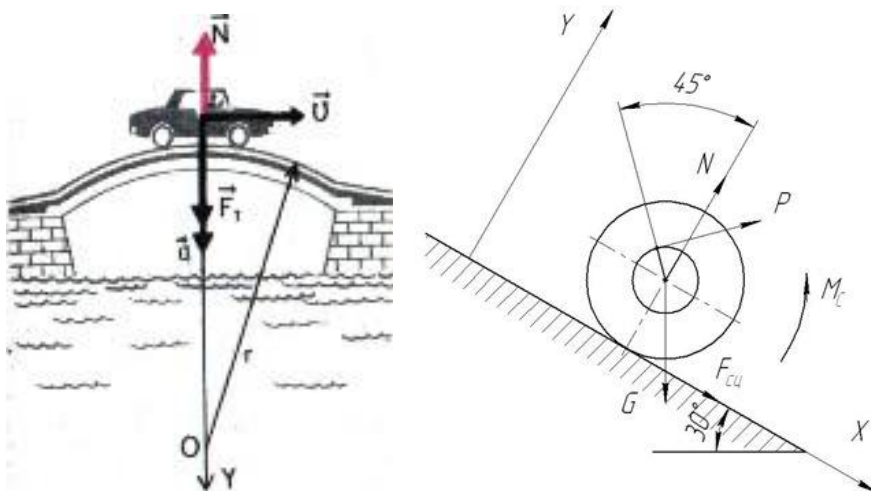


МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ
АГРАРНИЙ КОЛЕДЖ УПРАВЛІННЯ І ПРАВА
ПОЛТАВСЬКОЇ ДЕРЖАВНОЇ АГРАРНОЇ АКАДЕМІЇ



«Взаємодія тіл. Сили. Закони Ньютона.»

Рух тіла під дією кількох сил»

Приклади розв'язування задач

ПОЛТАВА 2013

Укладач: Худолій Іван Іванович - викладач фізики та астрономії Аграрного коледжу управління і права Полтавської державної аграрної академії

В посібнику викладені приклади розв'язування основних типів задач з теми «Взаємодія тіл. Сили. Закони Ньютона. Рух тіла під дією кількох сил» згідно шкільної програми. Посібник може бути корисним для студентів 1 курсів ВНЗ I-II рівня акредитації для самостійного опрацювання.

РОЗГЛЯНУТО ТА СХВАЛЕНО

НА ЗАСІДАННІ ЦИКЛОВОЇ КОМІСІЇ

Протокол № ____ від «__» _____ 20__ року

Голова циклової комісії _____

Зверніть увагу!!!

Розв'язування задач з динаміки слід починати з вибору системи відліку; визначення характеру і форми траєкторії руху тіл; виконання рисунка, на який нанести всі сили, що діють на кожне тіло, а також кінематичні характеристики руху. При цьому потрібно чітко уявляти, в результаті яких взаємодій виникає та або та сила, її характер, природу. Використовуючи одну координатну вісь, її доцільно спрямувати з вектором прискорення тіла. Далі записують основні рівняння динаміки у векторній формі для кожного тіла окремо. Потім основні рівняння динаміки виражають через проекції сил на вибрані осі координат. Використовуючи додаткові умови (невагомність і нерозтяжність ниток тощо), відшукують рівняння, яких не вистачало. Нарешті одержані рівняння розв'язують відносно шуканих величин.

Приклади розв'язування задач

1. При швидкості 20 м/с водій вимикає двигун і починає гальмування по горизонтальній ділянці дороги з коефіцієнтом тертя 0,2. Визначити час, через який зупиниться автомобіль, його прискорення та гальмівний шлях.

Розв'язання:

Дано: $v = 20 \text{ м/с}$ $\mu = 0,2$ <hr/> $t - ?; a - ?; S - ?$		Запишемо II закон Ньютона у векторній формі: $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}$ Спроектуємо на координатні осі:
---	--	--

$$Ox: F_{\text{тр}} - ma$$

$$Oy: N - mg = 0, \quad N = mg$$

Оскільки $F_{\text{тр}} = \mu N$, то

$$\mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g, \quad a = 0,2 \cdot 9,8 = 1,96 \text{ м/с}^2$$

Для рівносповільненого руху $v = v_0 - at$, оскільки кінцева швидкість

$$v = 0, \text{ то } at = v_0, \text{ а } t = \frac{v_0}{a} = \frac{20}{1,96} = 10,2 \text{ с}$$

Пройдений шлях знайдемо з формули для рівносповільненого руху:

$$S = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}; \quad v = 0, \text{ то}$$

$$S = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{20_0^2}{2 \cdot 1,96} = 102 \text{ м.}$$

Відповідь: $a = 1,96 \text{ м/с}^2$, $t = 10,2 \text{ с}$, $S = 102 \text{ м}$.

2. Через нерухомий блок перекинута нитка, до якої підвішені вантажі масою $m_1 = 1 \text{ кг}$; $m_2 = 2 \text{ кг}$. Визначити прискорення вантажів і натяг ниток під час руху вантажів. Тертям в блоці і масою нитки знехтувати.

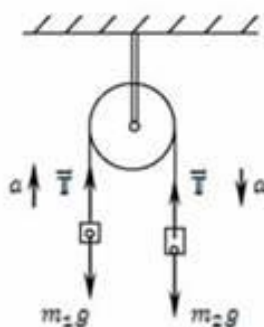
Розв'язання:

Дано:

$$m_1 = 1 \text{ кг}$$

$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

$$a = ?; \quad T = ?$$



Вантажі зв'язані один з одним натягнутою ниткою, тому їх прискорення буде однаковим. Запишемо другий закон Ньютона у проекції на вісь Oy для кожного тіла:

$$T - m_1g = m_1a \Rightarrow T = m_1a + m_1g$$

$$T - m_2g = -m_2a \Rightarrow T = m_2g - m_2a$$

Прирівнявши, отримаємо прискорення:

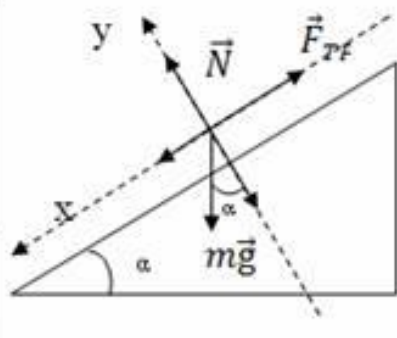
$$a = \frac{m_2g - m_1g}{m_2 + m_1} \approx 3,3 \text{ м/с}^2, \text{ а сила натягу } T = 1(9,8 + 3,3) \approx 13,1 \text{ Н}$$

Відповідь: $a \approx 3,3 \text{ м/с}^2$, $T \approx 13,1 \text{ Н}$.

3. Похила площина, утворює кут $\alpha = 25^\circ$ з площиною горизонту і має довжину $l = 2 \text{ м}$. Тіло, рухаючись рівноприскорено, скочає з цієї площини за час $t = 2 \text{ с}$. Визначити коефіцієнт тертя тіла об площину.

Розв'язання:

Дано:
 $\alpha = 25^\circ$
 $l = 2\text{ м}$
 $t = 2\text{ с}$
 $\mu = ?$



Запишемо II закон Ньютона в проекціях на координатні осі:
 $Ox: mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma$
 $Oy: N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow$
 $N = mg \cos \alpha$
 Врахувавши, що $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$,
 Отримаємо:

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma \quad \text{або} \quad g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = a, \quad \mu = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} \quad \text{для}$$

$$\text{рівноприскореного руху} \quad l = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2l}{t^2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 1 \text{ м/с}^2$$

$$\mu = \frac{9,8 \cdot \sin 25^\circ - 1}{9,8 \cdot \cos 25^\circ} = 0,35$$

Відповідь: $\mu = 0,35$.

4. Льотчик виконує «Мертву петлю» радіусом 250 м і тисне на сидіння із силою 7056 Н. Маса льотчика 80 кг. Визначте лінійну швидкість літака.

Дано:
 $F_{\text{тис}} = 7056 \text{ Н}$,
 $m = 80 \text{ кг}$,
 $r = 250 \text{ м}$

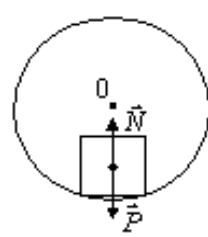


Рис. 2.6.

Розв'язок:

Пілот діє на сидіння крісла із силою ваги \vec{P} , яка зрівноважується силою реакції опори \vec{N} . Оскільки в нижній точці обидві сили напрямлені по одній прямій у протилежні боки, то їх рівнодійна $F = N - P$.

Застосуємо другий закон Ньютона: $F = ma$,

де $a = \frac{v^2}{r}$, m - маса пілота. Тоді: $N - P = m \frac{v^2}{r}$, звідки $v = \sqrt{\frac{(N - P)r}{m}}$. За третім

законом Ньютона $N = F_{\text{тис}}$, тоді

$$v = \sqrt{\frac{(7056 - 784) \text{ Н} \cdot 250 \text{ м}}{80 \text{ кг}}} = 140 \text{ м/с}.$$

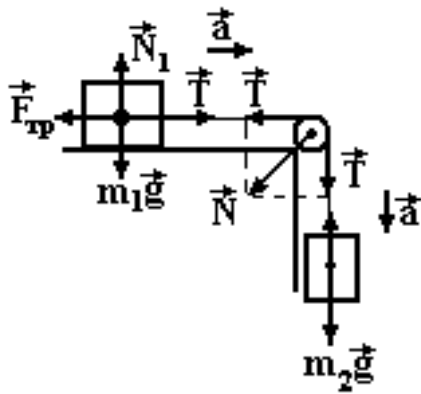
Перевіримо розв'язок:

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $v = 140 \text{ м/с}$.

5. Через нерухомий блок перекинута нитка, до кінців якої прикріплені вантажі $m_1 = 2 \text{ кг}$ і $m_2 = 3 \text{ кг}$ (рис.). Визначити прискорення a вантажів та силу N , з якою блок діє на вісь, якщо коефіцієнт тертя між вантажем та горизонтальною поверхнею $k = 0,2$. Масою блока та нитки знехтувати.

Рішення. Показуємо сили, які діють на тіла і на вісь блока, та прискорення. Записуємо другий закон Ньютона для обох тіл:



1-е тіло: $\vec{a} = \frac{\vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}}{m_1}$ і в проекції на напрямок прискорення

$$am_1 = T - F_{\text{тр}}, \text{ де } F_{\text{тр}} = kN = km_1g;$$

2-е тіло: $\vec{a} = \frac{m_2\vec{g} + \vec{T}}{m_2}$ і в проекції на напрямок прискорення $am_2 = m_2g - T$. Звільняємось від сили натягу T

$$a = \frac{m_2g - km_1g}{m_1 + m_2} = \frac{30 - 0,2 \cdot 20}{5} = 5,2 \text{ м/с}^2.$$

Одержаний вираз для прискорення можна було б записати відразу за другим законом Ньютона. Дійсно, в чисельнику стоїть рівнодійна проекцій зовнішніх сил на напрямок прискорення (на нитку), а в знаменнику - маса всієї системи.

Сила N дорівнює векторній сумі взаємно перпендикулярних сил натягу. За теоремою Піфагора $N = \sqrt{T^2 + T^2} = T\sqrt{2} = m_2(g - a)\sqrt{2} = 3 \cdot 4,8 \cdot \sqrt{2} = 20,4 \text{ Н}$.

6. Визначити значення сили взаємного притягання двох кораблів, віддалених один від одного на 100 м, якщо маса кожного з них 10 000 т.

Дано:

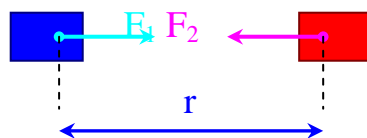
$$m_1 = m_2 = 10000 \text{ т}$$

$$r = 100 \text{ м}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$$

$F = ?$

Розв'язання



$$F_1 = F_2 = F$$

$$F = Gm_1m_2/r^2 = Gm^2/r^2$$

$$m_1 = m_2 = m = 10^4 \text{ т} = 10^7 \text{ кг}$$

$$r = 10^2 \text{ м}$$

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{14} \text{ кг} / 10^4 \text{ м} = 0,667 \text{ Н} = 0,7 \text{ Н}$$

7. Під дією сили 50 Н координата тіла змінюється за законом $x = 10 + 5t + 0,5t^2$. Знайти масу цього тіла.

Дано:

Розв'язання

$m - ?$

Згідно з другим законом Ньютона

$$F = ma,$$

$$x = 10 + 5t + 0,5t^2$$

$$F = 50 \text{ Н}$$

$$\text{звідки } m = \frac{F}{a}.$$

Під дією сили тіло рухається рівноприскорено, і його координата змінюється за законом

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

За умовою $x = 10 + 5t + 0,5t^2$.

Порівняємо ці два вирази і знайдемо прискорення a :

$$\frac{at^2}{2} = 0,5t^2, \quad \text{звідки } a = 1 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо масу тіла

$$m = \frac{50 \text{ Н}}{1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{50 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}}{1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 50 \text{ кг}.$$

Відповідь: $m = 50 \text{ кг}$.

8. На тіло масою 800 г одночасно діють дві сили 12 Н і 6 Н, напрямлені в протилежні боки уздовж однієї прямої. Визначити модуль і напрям прискорення.

Дано:

Розв'язання

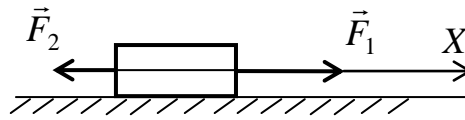
a - ?

$$m = 800 \text{ г} = 0,8 \text{ кг}$$

$$F_1 = 12 \text{ Н}$$

$$F_2 = 6 \text{ Н}$$

Згідно з умовою задачі зробимо рисунок



Згідно з другим законом Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ де } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \text{рівнодіюча сила.}$$

У проекції на вибрану вісь OX

$$F = F_1 - F_2.$$

Таким чином, $a = \frac{F_1 - F_2}{m}$.

Перевіримо розмірність, підставимо числові значення:

$$[a] = \frac{\text{Н} - \text{Н}}{\text{кг}} = \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a = \frac{12 - 6}{0,8} = \frac{6}{0,8} = 7,5 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

Відповідь: $a = 7,5 \text{ м/с}^2$, прискорення напрямлене у бік дії більшої сили \vec{F}_1 .

9. Тіло масою 2 кг піднімають за допомогою нитки рівноприскорено з прискоренням $0,2 \text{ м/с}^2$. Знайти силу натягу нитки і вагу цього тіла.

Дано:

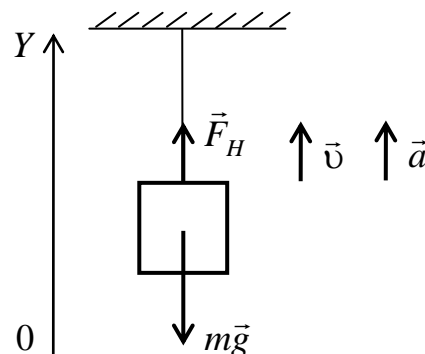
Розв'язання

F_H - ? P - ?

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$a = 0,2 \text{ м/с}^2$$

Згідно з умовою задачі зробимо рисунок. Тіло взаємодіє із Землею і ниткою. Отже, на тіло діють сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу нитки \vec{F}_H .



Запишемо рівняння руху тіла у векторній формі:

$$m\vec{g} + \vec{F}_H = m\vec{a}.$$

Спроекуємо рівняння руху на вибрану вісь ОУ:

$$F_H - mg = ma,$$

звідки

$$F_H = mg + ma = m(g + a),$$

де $g = 9,8 \frac{M}{c^2}$ - прискорення вільного падіння.

Перевіримо розмірність та підставимо числові значення:

$$[F_H] = \kappa z \cdot \frac{M}{c^2} = H; F_H = 2(9,8 + 0,2) = 20(H).$$

Згідно з третім законом Ньютона вага тіла чисельно дорівнює силі натягу нитки $P = F_H = 20H$.

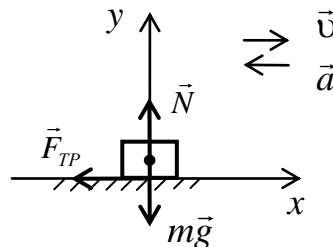
Відповідь: $F_H = 20H$; $P = 20H$.

10. Автомобіль масою 1500 кг рухається по горизонтальній дорозі зі швидкістю 72 км/год. Після відключення двигуна автомобіль проходить 50 м до зупинки. Знайти силу тертя і коефіцієнт тертя.

Дано:

Розв'язання

$F_{тер} - ? \mu - ?$
$m = 1500 \text{ кг}$
$v_0 = 72 \text{ км/год} = 20 \text{ м/с}$
$S = 50 \text{ м}$
$v = 0$



На автомобіль діють сила тяжіння $m\vec{g}$, сила реакції дороги \vec{N} і сила тертя $\vec{F}_{тер}$. Рух тіла рівносповільнений ($v < v_0$), тому вектор прискорення \vec{a} напрямлений проти руху тіла. Запишемо рівняння руху автомобіля у векторній формі відповідно до другого закону Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = m\vec{a}.$$

Щоб перейти від векторної форми рівняння до скалярної, проведемо координатні осі так, щоб вісь ОХ збігалася з напрямом руху тіла, а вісь ОУ була їй перпендикулярна. Тоді в проекціях на координатні осі маємо

$$\begin{cases} -F_{\text{тер}} = -ma \\ N - mg = 0 \end{cases},$$

звідки

$$F_{\text{тер}} = ma, \quad (1)$$

$$N = mg. \quad (2)$$

З кінематики шлях при рівносповільненому русі

$$S = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a}, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{v_0^2}{2S}.$$

Після підстановки в (1) маємо

$$F_{\text{тер}} = \frac{mv_0^2}{2S}.$$

Коефіцієнт тертя дорівнює

$$\mu = \frac{F_{\text{тер}}}{N}.$$

Перевіримо розмірність отриманих формул:

$$[F_{\text{тер}}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};$$

$$[\mu] = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = 1.$$

Підставимо числові значення:

$$F_{\text{тер}} = \frac{1500 \cdot 400}{2 \cdot 50} = 6000(\text{Н}) = 6(\text{кН});$$

$$\mu = \frac{6000}{1500 \cdot 9,8} = 0,41.$$

Відповідь: $F_{\text{тер}} = 6\text{кН}$; $\mu = 0,41$.

11. До кінців невагомої та нерозтяжної нитки, перекинutoї через невагомий та нерухомий блок, підвішені два тіла масами 2кг і 3кг . З яким прискоренням рухаються ці тіла?

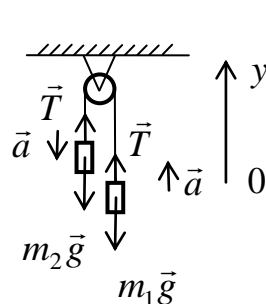
Дано:

Розв'язання

$a - ?$

$$m_1 = 2\text{кг}$$

$$m_2 = 3\text{кг}$$



Умова невагомості та нерозтяжності нитки дозволяє не враховувати її масу та деформацію. Це означає, що сила натягу нитки на всіх її ділянках однакова, і тіла рухаються з одним прискоренням:

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 = T, \\ a_1 = a_2 = a. \end{aligned}$$

На кожне тіло діють сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила натягу нитки \vec{T} .

Запишемо динамічне рівняння руху тіл:

$$\begin{cases} \vec{T} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a} \\ T + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}. \end{cases}$$

Запишемо ці рівняння в проекціях на вибрану вісь OY :

$$\begin{cases} T - m_1g = m_1a & (1) \\ T - m_2g = -m_2a. & (2) \end{cases}$$

Віднімемо від рівняння (1) рівняння (2) і отримаємо:

$$\begin{aligned} T - m_1g - T + m_2g &= m_1a + m_2a, \\ g(m_2 - m_1) &= a(m_1 + m_2), \end{aligned}$$

звідки

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}.$$

Перевіримо розмірність:

$$[a] = \frac{M}{c^2} \cdot \frac{K\mathcal{L}}{K\mathcal{L}} = \frac{M}{c^2}.$$

Підставимо числові значення:

$$a = 9,8 \frac{3-2}{3+2} = 1,98 \left(\frac{M}{c^2} \right).$$

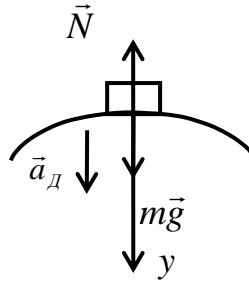
Відповідь: $a = 1,98 \frac{M}{c^2}$.

12. Автомобіль з вантажем масою 5 т проїжджає по опуклому мосту зі швидкістю 6 м/с. З якою силою автомобіль тисне на середину моста, якщо радіус кривизни моста 50 м?

Дано:

Розв'язання

$F - ?$
$m = 5\text{т} = 5 \cdot 10^3 \text{кг}$
$v = 6 \text{м/с}$
$R = 50 \text{м}$



На автомобіль діють сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила реакції опори \vec{N} . Направимо вісь OY вертикально вниз по радіусу моста.

Запишемо для автомобіля рівняння руху у векторній формі:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Спроектуємо це рівняння на вісь OY :

$$mg - N = ma_d,$$

де $a_d = \frac{v^2}{R}$ - доцентрове прискорення.

Тоді

$$N = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right).$$

За третім законом Ньютона з такою ж силою автомобіль буде тиснути на міст:

$$F = N = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right).$$

Перевіримо розмірність:

$$[F] = \text{кг} \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} \right) = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

Підставимо числові значення:

$$F = 5 \cdot 10^3 \left(9,8 - \frac{36}{50} \right) \approx 4,5 \cdot 10^4 (H) \approx 45 \text{кН}.$$

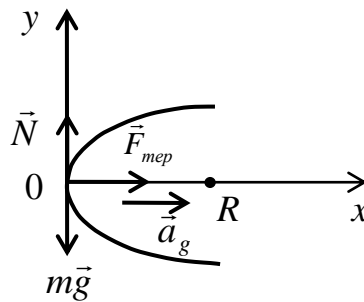
Відповідь: $F = 45 \text{кН}$.

13. З якою максимальною швидкістю може рухатись автомобіль на горизонтальній площині радіусом 100м , якщо коефіцієнт тертя дорівнює $0,4$.

Дано:

Розв'язання

$v - ?$
$R = 100 \text{м}$
$\mu = 0,4$



На автомобіль діють сила тяжіння $m\vec{g}$, сила реакції опори \vec{N} , напрямлена перпендикулярно до площини опори, та сила тертя $\vec{F}_{тер}$, напрямлена в кожний момент часу проти можливого зміщення коліс.

Систему відліку зв'яжемо із Землею, вісь OX спрямуємо горизонтально до центра кола, вісь OY - вертикально вгору.

Запишемо рівняння руху у векторному вигляді:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = m\vec{a}.$$

У проекціях на координатні осі маємо:

$$\begin{cases} F_{тер} = ma_d, & (1) \\ N - mg = 0, & (2) \end{cases}$$

де $a_d = \frac{v^2}{R}$ - доцентрове прискорення.

Перепишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} F_{тер} = \frac{mv^2}{R}, & (1) \\ N = mg. & \end{cases}$$

Підставимо вираз для N у формулу для сили тертя

$$F_{тер} = \mu N = \mu mg. \quad (2)$$

Прирівняємо вирази (1) та (2):

$$\frac{mv^2}{R} = \mu mg, \text{ звідки } v = \sqrt{\mu g R}.$$

Перевіримо розмірність:

$$[v] = \sqrt{\frac{M}{c^2} \cdot M} = \frac{M}{c}.$$

Підставимо числові значення:

$$v = \sqrt{0,4 \cdot 10 \cdot 100} = \sqrt{400} = 20 \left(\frac{M}{c} \right).$$

Відповідь: $v = 20 \frac{M}{c}$.

14. Вважаючи орбіту Землі коловою, визначити лінійну швидкість руху Землі навколо Сонця.

Дано:

Розв'язання

$v - ?$	Рух Землі по коловій орбіті відбувається під дією сили гравітаційного притягання Сонця, модуль якої знаходимо за формулою:
$r = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$	
$m_c = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$	

$$F = G \frac{m_3 \cdot m_c}{r}.$$

Ця сила надає Землі доцентрове прискорення a_D :

$$a_D = \frac{v^2}{r}.$$

За другим законом Ньютона: $F = m_3 a_D$.

$$G \frac{m_3 \cdot m_c}{r} = m_3 \frac{v^2}{r},$$

де $m_c = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ - маса Сонця,

$r = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$ - відстань від Землі до Сонця.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot M^2}{\text{кг}^2}$ - гравітаційна стала.

Перевіримо розмірність:

$$[v] = \sqrt{\frac{H \cdot M^2 \cdot \text{кг}}{\text{кг}^2 \cdot M}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot M \cdot M}{c^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{M}{c}.$$

Підставимо числові значення і виконаємо обчислення:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98 \cdot 10^{30}}{1,49 \cdot 10^{11}}} = 29,8 \cdot 10^3 \left(\frac{M}{c} \right) = 29,8 \left(\frac{\text{км}}{c} \right). \text{ Відповідь: } v = 29,8 \frac{\text{км}}{c}.$$